



Cinematica degli scheletri



Corso di Realtà Virtuale
Laurea Magistrale in Informatica
Università degli Studi di Milano
Prof. Alberto Borghese
Laboratorio di Applied Intelligent Systems (Ais-Lab)
Dipartimento di Informatica
alberto.borghese@unimi.it



A.A. 2020-2021

<http://borghese.di.unimi.it/>



Sommario



- **Ricostruzione 3D**
- Catena cinematica
- La cinematica diretta
- Introduzione alla cinematica inversa

A.A. 2020-2021

2/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Calibrazione, Proiezione e Ricostruzione



$$x - x_0 + f(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{21}(Y - Y_0) + m_{31}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 + g(x, y, x_0, y_0) = -f \cdot \frac{m_{12}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{32}(Z - Z_0)}{m_{13}(X - X_0) + m_{23}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{K} \mathbf{M} \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{H} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Parametri esterni (4x4)

Parametri interni (3x3)

3 attori:

- A) I punti nello spazio 3D: $\{\mathbf{P}(X,Y,Z)\}$
- B) I punti misurati sul piano immagine $\{\mathbf{p}(x,y,f)\}$
- C) I parametri $\{X_C, Y_C, Z_C, m_{ij}(\omega, \phi, k), f, x_0, y_0, \{ap_x\}, \{ap_y\}\}$

3 problemi:

- A) + B) \rightarrow C) Determinazione dei parametri del modello proiettivo (calibrazione).
- B) + C) \rightarrow A) Ricostruzione (ray intersection, VR).
- A) + C) \rightarrow B) Proiezione (augmented reality).



Dal 2D al 3D

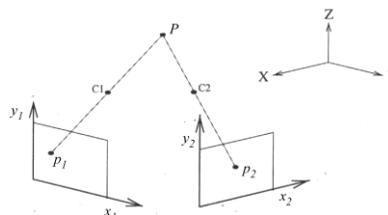
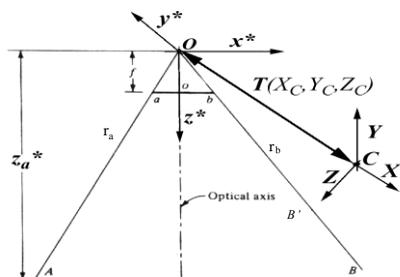


Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Nello spazio 3D esistono ∞^1 punti compatibili con b

Sono tutti i punti nello spazio 3D, $\{X,Y,Z\}$ sulla retta per b e O

Ob identifica una retta

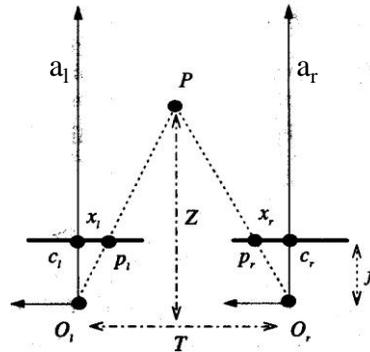
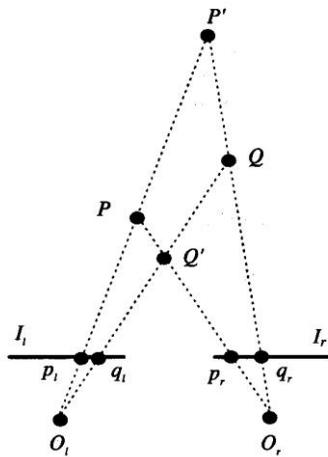
Soluzione: Stereoscopia
Visione attraverso una coppia di sensori



3D basato su stereo-disparità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, x_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a) $Z / T = f / d = f / (x_l + x_r)$ (b)

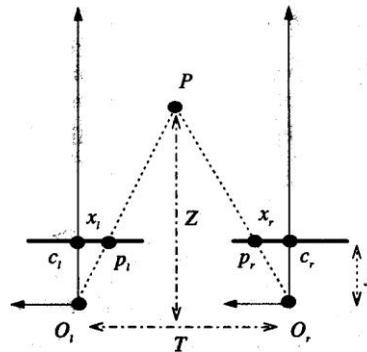
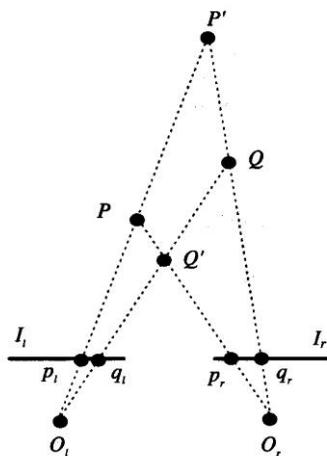
Nel sistema visivo umano, T rappresenta (approssimativamente) la distanza interpupillare, che viene regolata nei visori di VR sull'Utente.



Risoluzione nella profondità



- $O_l - O_r = \text{baseline}$
- $\{a_l, x_r\}$ coppia di assi ottici
- $x_l + x_r = d = \text{stereo disparità}$



(a)

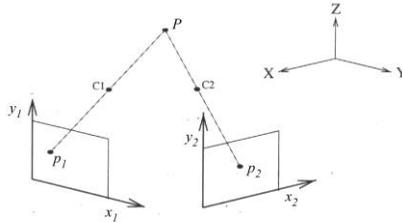
(b)

$Z / T = f / d \quad d = f T / Z$

$\Delta d / \Delta Z = -f T / Z^2$



Ricostruzione stereoscopica



2 coppie di immagini \rightarrow 2 coppie di equazioni di collinearità
 $\{p_1(x,y) \iff p_2(x,y)\}$

4 equazioni in 3 incognite:
 $[p_1(x,y) | p_2(x,y)] \Rightarrow P(XYZ)$.

Figura 2.6 Il problema della ricostruzione 3D.

Equazioni di collinearità per due video-camere:

$$\bullet a_{1,TV1} X + b_{1,TV1} Y + c_{1,TV1} Z = d_{1,TV1}$$

$$\bullet a_{2,TV1} X + b_{2,TV1} Y + c_{2,TV1} Z = d_{2,TV1}$$

$$\bullet a_{1,TV2} X + b_{1,TV2} Y + c_{1,TV2} Z = d_{1,TV2}$$

$$\bullet a_{2,TV2} X + b_{2,TV2} Y + c_{2,TV2} Z = d_{2,TV2}$$

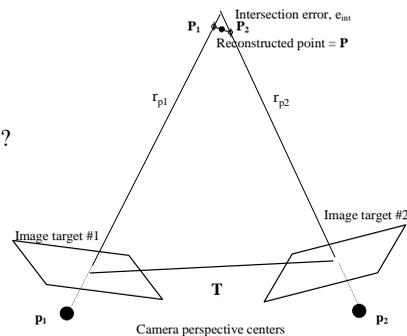


Ricostruzione - matrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{1TV1} & b_{1TV1} & c_{1TV1} \\ a_{2TV1} & b_{1TV1} & a_{1TV1} \\ a_{1TV2} & b_{1TV2} & c_{1TV2} \\ a_{2TV2} & b_{2TV2} & c_{2TV2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} d_{1TV1} \\ d_{2TV1} \\ d_{1TV2} \\ d_{2TV2} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

In forma matriciale: $A P = B \quad \Rightarrow \quad P = (A^T A)^{-1} A^T B$

- Effetto dell'errore di misura: quanto vale P ?
- Quando non ammette soluzioni?



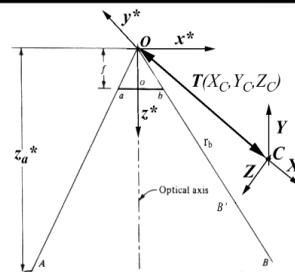


Ricostruzione - Ray intersection

Le equazioni di collinearità individuano individualmente una retta come intersezione di 2 piani:

- $a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$
- $a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$

L'intersezione dei 2 piani mi dà la retta di proiezione Op nello spazio 3D.



Altra soluzione: equazioni in forma parametrica delle due rette:

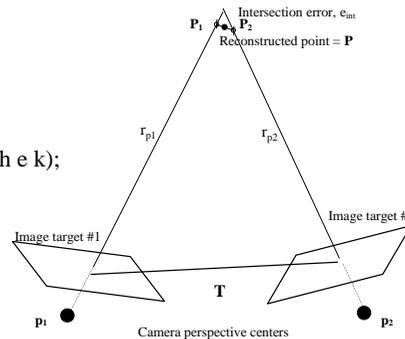
$$\begin{aligned} X_1 &= X_{c1} + a_1 k & X_2 &= X_{c2} + a_2 h \\ Y_1 &= Y_{c1} + b_1 k & Y_2 &= Y_{c2} + b_2 h \\ Z_1 &= Z_{c1} + c_1 k & Z_2 &= Z_{c2} + c_2 h \end{aligned}$$

$$\min_{h,k} [(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2]$$

- Calcolo della distanza (funzione dei due parametri, h e k);
- Minimizzazione (funzione dei due parametri).

Ritrovo la stessa soluzione.

$$P = (A^T A)^{-1} A^T B$$



Riassunto



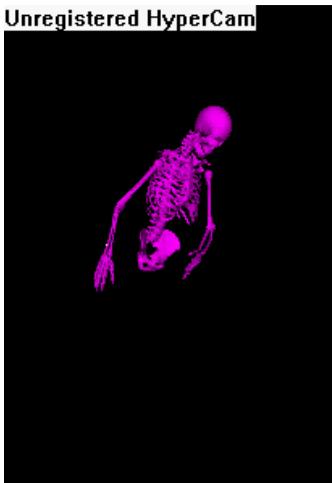
- Ricostruzione 3D
- **Catena cinematica**
- La cinematica diretta
- Introduzione alla cinematica inversa



Cinematica di uno scheletro



Unregistered HyperCam



Curve di animazione associate ai gradi di libertà.

A.A. 2020-2021

13/42

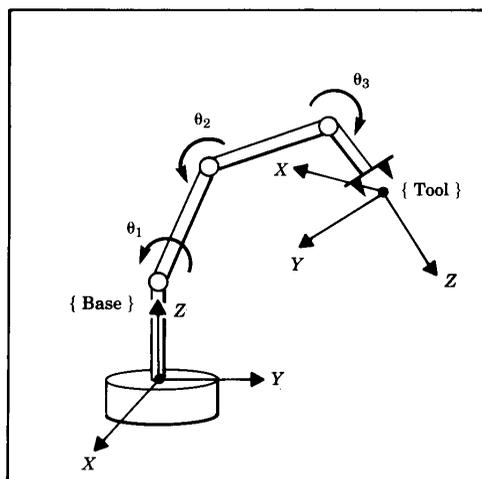
<http://borghese.di.unimi.it/>



Cinematica diretta



Conosco il valore dei joint
(angolo o offset) \rightarrow
posizione ed orientamento
dell'end-point.



La cinematica viene descritta come sequenza di rotazioni /
traslazioni / scala che hanno l'effetto di muovere l'end-
effector solitamente nello spazio Cartesiano.

A.A. 202

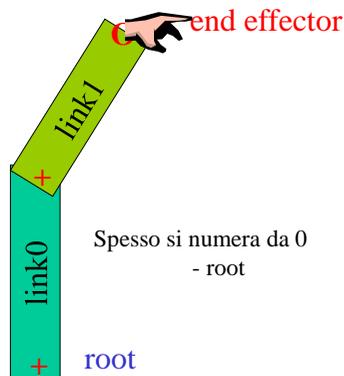
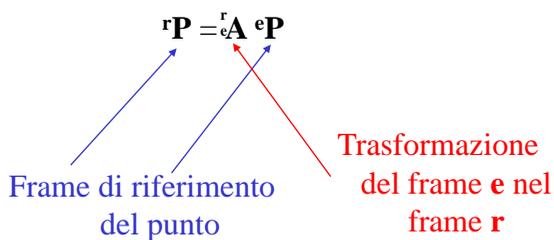
di.unimi.it/



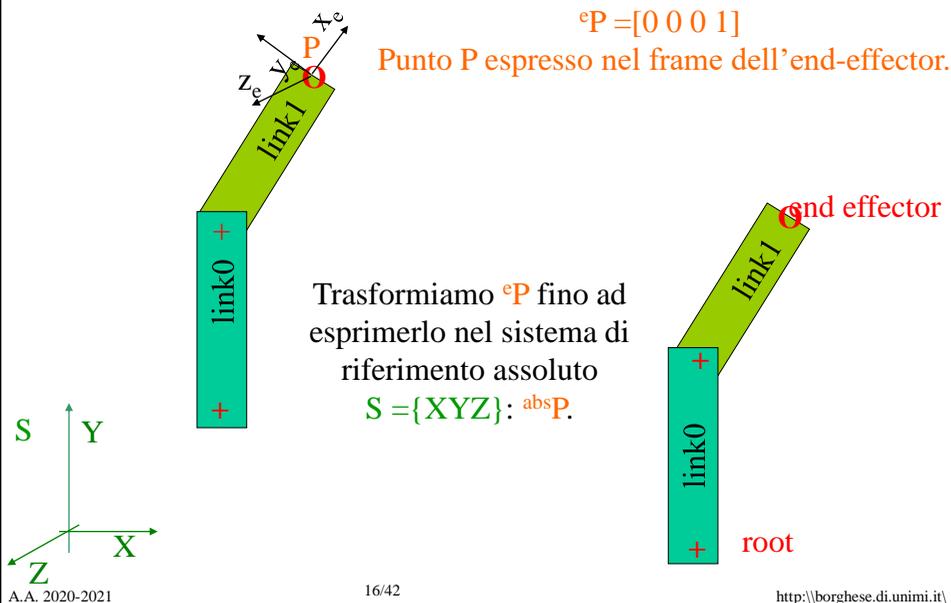
Convenzioni



$$\begin{bmatrix} {}^r X_P \\ {}^r Y_P \\ {}^r Z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & T_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & T_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^e X_P \\ {}^e Y_P \\ {}^e Z_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

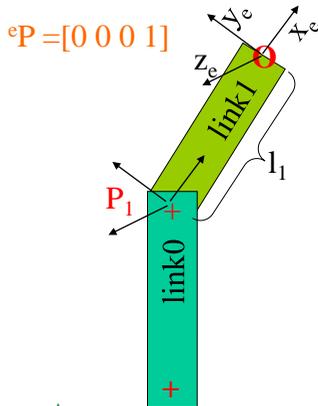


Posizione dei segmenti (I)



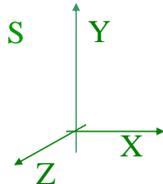
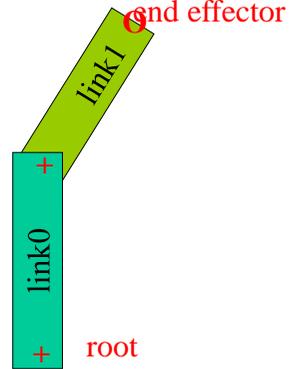


Posizione dei segmenti (II)



$${}^{P1_L1}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}{}_e\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} = [1, 0, 0, 1]^T$$

$${}^{P1_L1}{}_e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



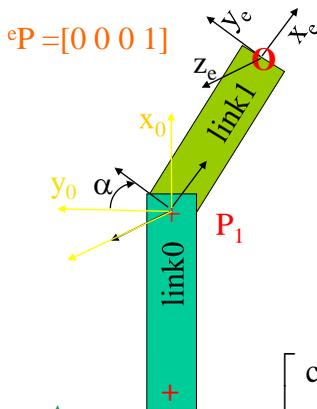
A.A. 2020-2021

17/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti (III)

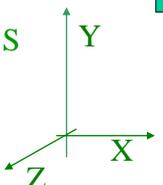
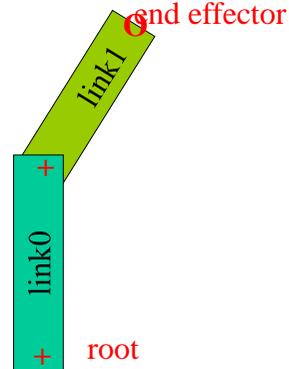


$${}^{P1_L1}\mathbf{P} = [1, 0, 0, 1]$$

$${}^{P1_L0}\mathbf{P} = {}^{P1_L1}{}_{P1_L0}\mathbf{A} {}^{P1_L1}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_L0}{}_{P1_L1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



A.A. 2020-2021

18/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti dall'end-point



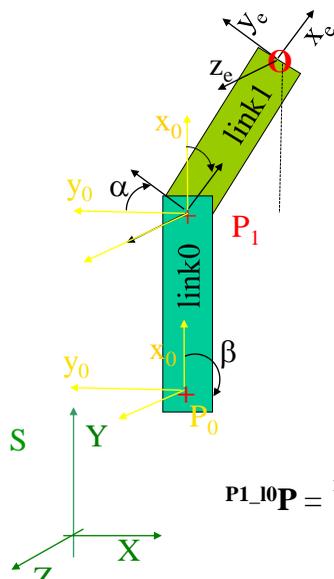
$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} P1_{10} \\ P1_{11} \end{matrix} \mathbf{A} \begin{matrix} P1_{11} \\ P1_{10} \end{matrix} \mathbf{A} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{P1_{10}}_L \mathbf{P} = \begin{matrix} P1_{10} \\ e \end{matrix} \mathbf{A} \begin{matrix} e \\ P \end{matrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [1, 0, 0, 1]^T$$



Esempio



$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & l_1 \cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -l_1 \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 45^\circ$

$${}^{P1_{10}}_e \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P1_{10}}_L \mathbf{P} = \begin{matrix} P1_{10} \\ e \end{matrix} \mathbf{A} \begin{matrix} e \\ P \end{matrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -l_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posizione dei segmenti (IV)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{P_0}_{L_0}\mathbf{P} = {}^{P_0}_{P_1}{}^{\mathbf{A}} {}^{P_1}_{L_0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_1}_{L_0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{P_1}{}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

end effector

root

A.A. 2020-2021 21/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

Posizione dei segmenti (V)

${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

$${}^{P_0}_{ABS}\mathbf{P} = {}^{P_0}_{P_0}{}^{ABS}{}^{\mathbf{A}} {}^{P_0}_{L_0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} (l_1 \cos \alpha + l_0) \cos \beta - l_1 \sin \alpha \sin \beta \\ -(l_1 \cos \alpha + l_0) \sin \beta - l_1 \sin \alpha \cos \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{L_0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{P_1}{}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{P_0}_{L_0}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \alpha + l_0 \\ -l_1 \sin \alpha \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

end effector

root

A.A. 2020-2021 22/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti (VI)



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

${}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

end effector

root

A.A. 2020-2021 23/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Concatenando le trasformazioni



${}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \quad {}_{\text{P0_10}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \quad {}_{\text{P1_10}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \quad {}_{\text{P1_11}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}_{\text{P0_ABS}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{P} = {}_{\text{e}}^{\text{ABS_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

A.A. 2020-2021 24/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Posizione dei segmenti: fattorizzazione



${}^e\mathbf{P} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = {}^{ABS_ABS}\mathbf{A} {}^e\mathbf{P} =$

$$= \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ABS_ABS}\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A.A. 2020-2021 25/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

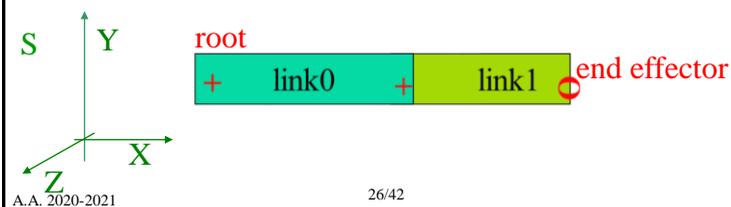


Esempio di calcolo della posizione



$$\alpha = \beta = 0$$

$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_0 + T_x \\ T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$





Dall'end-effector alla base



- Il movimento dell'end effector viene espresso in funzione della **geometria** (lunghezze dei segmenti) e dei **parametri liberi** (rotazione dei vari segmenti e posizione della radice).
- Le rotazioni vengono definite in un **sistema di riferimento locale**.
- Per ottenere la trasformazione delle coordinate dell'end-effector da sistema locale a sistema globale occorre....

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}] {}^e\mathbf{P}$$

fattorizzare le matrici di trasformazione.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{A} = {}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}$$

A.A. 2020-2021

27/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Osservazioni sulle matrici di trasformazione, A



Il numero di matrici di trasformazione concatenate cresce spostandosi dall'end-effector alla base.

A è funzione di:

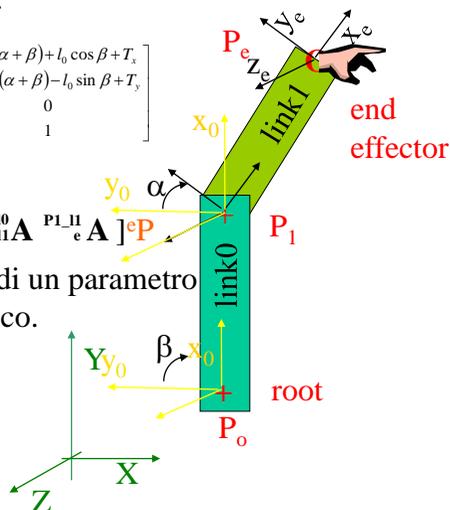
- Geometria
- Parametri liberi

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & 0 & l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & 0 & -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A} \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}] {}^e\mathbf{P}$$

Ciascuna trasformazione è funzione o di un parametro geometrico o di un parametro cinematico.

$${}^{\text{ABS_ABS}}_e\mathbf{P} = [{}^{\text{ABS_ABS}}_{\text{P0_ABS}}\mathbf{A}(T) \quad {}^{\text{P0_ABS}}_{\text{P0_I0}}\mathbf{A}(\beta) \quad {}^{\text{P0_I0}}_{\text{P1_I0}}\mathbf{A}(l_0) \quad {}^{\text{P1_I0}}_{\text{P1_I1}}\mathbf{A}(\alpha) \quad {}^{\text{P1_I1}}_e\mathbf{A}(l_1)] {}^e\mathbf{P}$$



A.A. 2020-2021

28/42

<http://borghese.di.unimi.it/>



Quante matrici di trasformazione?



- Ad ogni grado di libertà è associata una trasformazione.
- Ad ogni link sarà associata una trasformazione.
- Ci saranno tante matrici quanti sono i gradi di libertà + link.

- Notazione molto generale (approccio costruttivo).
- Notazione prolissa.

- Si arriva a 1 matrice di trasformazione, qualsiasi il numero di trasformazioni elementari.
- La matrice di trasformazione complessiva viene costruita in modo incrementale, rispettando la gerarchia.



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- **La cinematica diretta**
- Introduzione alla cinematica inversa

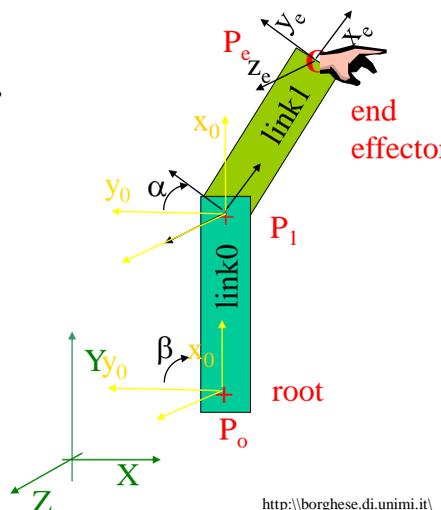


La cinematica diretta



Data una sequenza temporale di angoli, è univocamente determinato lo spostamento di ciascun punto dello scheletro.

La procedura di calcolo è *sequenziale* secondo la gerarchia dei joint, dalla base all'end-effector.



Come animare uno scheletro



Data la sequenza di angoli (**relativi**) è possibile determinare istante per istante la posizione del braccio e dell'end-effector.

Basta applicare le matrici di trasformazione a partire dalla radice con i parametri aggiornati. Concatenazione di trasformazioni (stack).

La notazione robotica di Denavit-Hartenberg è concisa e perciò particolarmente apprezzabile.

Perché non si utilizzano gli angoli di rotazione assoluti? Si potrebbero utilizzare?

Joint space (peso dei joint)

Rotazione attorno a P_0 (angolo β)

Rotazione attorno a P_1 (angolo α)

La posizione dell'end effector è diversa a parità di rotazione.

A.A. 2020-2021 33/42 <http://borghese.di.unimi.it/>

Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)

end effector

root

$${}_{ABS_ABS}P = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}_{ABS_ABS}P(t) = {}_{ABS_ABS}A(t) \ eP$$

$$\implies$$

$${}_{ABS_ABS}P_x(t) = f_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_y(t) = f_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$${}_{ABS_ABS}P_z(t) = f_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

A.A. 2020-2021 34/42 <http://borghese.di.unimi.it/>



Descrizione cinematica diretta



$$\mathbf{ABS_ABSP} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha + \beta) + l_0 \cos \beta + T_x \\ -l_1 \sin(\alpha + \beta) - l_0 \sin \beta + T_y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ABS_ABSP}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{ABS_ABSP}(t) = \mathbf{f}(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Sequenza temporale di $[\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)] \rightarrow$ sequenza temporale di $\mathbf{ABS_ABSP}(t)$.

imi.it\



Descrizione cinematica diretta (forma matriciale)



$$\mathbf{ABS_ABSP}(t) = \mathbf{ABS_ABS} \mathbf{A}(t) \mathbf{eP}$$

$$\mathbf{ABS_ABSP}_x(t) = \mathbf{f}_x(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$\mathbf{ABS_ABSP}_y(t) = \mathbf{f}_y(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

$$\mathbf{ABS_ABSP}_z(t) = \mathbf{f}_z(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) \mid l_0, l_1)$$

Ciascuna di queste funzioni è rappresentata come prodotto di una riga della matrice \mathbf{A} per \mathbf{P} .



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta
- **Introduzione alla cinematica inversa**



La cinematica inversa



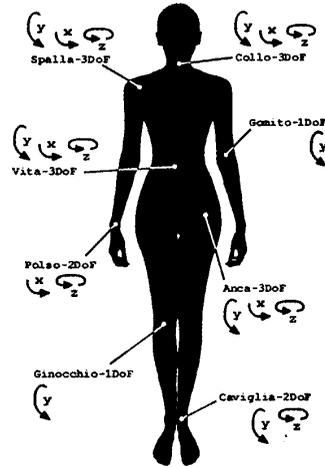
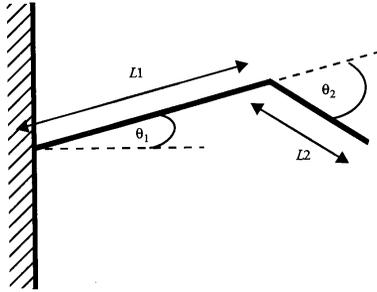
Dalla posizione (e orientamento) di end-point agli angoli.



Problema sotto-determinato (under-constrained).
Comportamento stereotipato. Perché?



Cerniere 3D



∞^1 soluzioni
NB: gli umani ne scelgono una sola.

Calcolo la cinematica inversa come sequenza di posizioni.

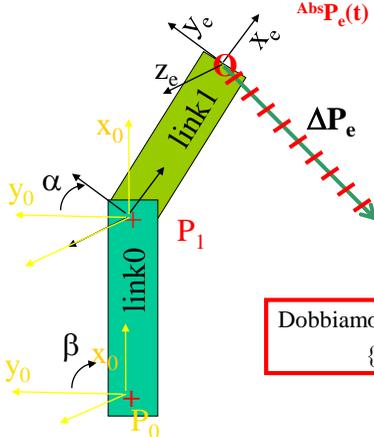


Soluzione differenziale



Consideriamo la trasformazione joint -> end_point.

$${}^{Abs}\mathbf{P}_e(t) = f(\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t) | l_0, l_1) = {}^e_A(t) {}^e\mathbf{P}_e(t)$$



$${}^{ABS_ABS}\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\alpha(t) + \beta(t)) + l_0 \cos \beta(t) + T_x(t) \\ -l_1 \sin(\alpha(t) + \beta(t)) - l_0 \sin \beta(t) + T_y(t) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

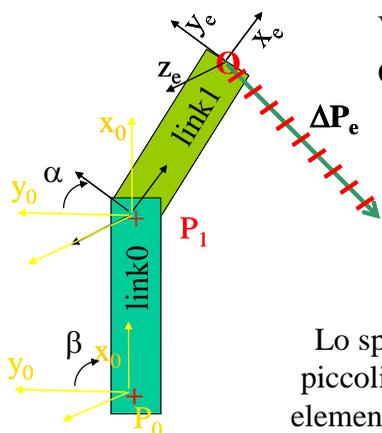
Dobbiamo trovare i profili temporali dei parametri liberi:
 $\{\alpha(t), \beta(t), T_x(t), T_y(t)\} = F^*(l_0, l_1, \mathbf{P}_e(t))$

E' una forma complessa, non lineare. Non è possibile invertire la relazione utilizzando algebra matriciale o forme analitiche. Cosa si può fare?

Linearizzare!



Cinematica inversa



Viene definita la traiettoria dell'end-point.
Occorre calcolare le rotazioni (i movimenti) dei joint.

Lo spostamento viene suddiviso in tanti piccoli spostamenti, per ogni spostamento elementare si calcola la variazione angolare richiesta per tutti i joint.

Lavoriamo sulle variazioni (differenziale).



Riassunto



- Ricostruzione 3D
- Catena cinematica
- La cinematica diretta
- Introduzione alla cinematica inversa